

# Исследование алгоритма сжатия изображений с потерями на основе фрактального дискретного косинусного преобразования

В.А. Буторов<sup>1</sup>, М.А. Чичева<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

<sup>2</sup>Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

**Аннотация.** В работе описан алгоритм сжатия изображений с потерями на основе фрактального дискретного косинусного преобразования. Реализованный алгоритм сопоставлен с классическим алгоритмом на основе двумерного дискретного косинусного преобразования. Экспериментально показано, что предлагаемый алгоритм вносит меньше искажений, повторяющих структуру блока, по сравнению с квадратными блоками двумерного дискретного косинусного преобразования. Отмечено, что характеристики визуального качества обоих алгоритмов слабо отличаются для некоторых значений энтропии сжатого изображения.

## 1. Введение

Для сжатия изображений широко используются алгоритмы сжатия с потерями, поскольку потери, вносимые в изображение, могут быть незаметны для глаз и практически не влияют на визуальное качество. В таких алгоритмах компрессия выполняется в частотной области, для получения значений в которой используются дискретные ортогональные преобразования (ДОП). Большое распространение в области обработки изображений получило дискретное косинусное преобразование (ДКП), а именно его двумерная вариация. Поскольку двумерное ДКП определено на квадратной области, получающиеся при сжатии артефакты имеют очень заметную глазу сетчатую структуру. Для устранения этого эффекта можно использовать классическое одномерное ДКП, применяемое к развертке, порожденной некоторой канонической системой счисления (КСС) [1], или фрактальное ДКП (ФДКП), определенное на фрактальной области, порожденной КСС [2]. В настоящей работе исследуется алгоритм сжатия с потерями, использующий различные вариации ФДКП. Результаты работы алгоритма сравниваются с компрессией на основе двумерного ДКП.

## 2. Теоретические основы

### 2.1. Фрактальное ДКП

В данном разделе приводятся краткие теоретические сведения о КСС в мнимых квадратичных полях [3]-[5],  $k$ -фундаментальных областях и ФДКП [2].

Пусть  $Q(\sqrt{d})$  — квадратичное поле:  $Q(\sqrt{d}) = \{z = a + b\sqrt{d}; a, b \in Q\}$ ,  $d$  — целое число, свободное от квадратов. Тогда элемент поля  $z \in Q(\sqrt{d})$  называется целым алгебраическим элементом поля, если его норма и след являются целыми числами,

$$\begin{aligned} \text{Norm}(z) &= (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}), \\ \text{Tr}(z) &= (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}). \end{aligned}$$

Целый алгебраический элемент  $\alpha \in Q(\sqrt{d})$  является основанием КСС в кольце целых элементов  $Q(\sqrt{d})$ , если любой целый элемент этого поля однозначно представим в форме конечной суммы

$$z = \sum_{j=0}^k z_j \alpha^j, z_j \in N = \{0, 1, \dots, |\text{Norm}(\alpha)| - 1\} \quad (1)$$

КСС в поле  $Q(\sqrt{d})$  называется пара  $\{\alpha, N\}$ .

$k$ -фундаментальной областью  $G_k$  называется множество целых алгебраических элементов поля  $Q(\sqrt{d})$ , образованное  $k$ -членной суммой формулы (1),

$$G_k = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} z_j \alpha^j, z_j \in N \right\}. \quad (2)$$

Пусть  $\Lambda \text{COS}_k(m, n) = \cos\left(\frac{\pi \text{Im}(\bar{\alpha}^{k+1} n(x+\beta))}{\text{Norm}(\alpha^k) \text{Im}(\alpha)}\right)$ , где параметр  $\beta$  находится из соотношений ортогональности:

$$\sum_{x \in G_k} \Lambda \text{COS}_k(p, x) \cdot \Lambda \text{COS}_k(q, x) = 0, p \neq q,$$

например, для случая  $\text{Norm}(\alpha) = 2$  параметр  $\beta$  вычисляется как

$$\beta = \frac{\alpha^{k+1} - 2\alpha^{k+1}}{2(\alpha - 1)}.$$

Тогда ФДКП над  $G_k$  называется преобразование

$$X(m) = \lambda(m) \sum_{n \in G_k} x(n) \Lambda \text{COS}_k(m, n),$$

где  $m \in D_k$ , а  $\lambda(m)$  — нормирующий коэффициент ФДКП.

Обратным ФДКП (ОФДКП) называется

$$x(n) = \sum_{m \in D_k} \lambda(m) X(m) \Lambda \text{COS}_k(m, n),$$

где  $n \in G_k$ , а  $\lambda(m)$  — нормирующий коэффициент ОФДКП.

Нормирующий коэффициент ФДКП и ОФДКП одинаков и вычисляется по формуле

$$\lambda(m) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\text{Norm}(\alpha^k)}}, & 2m \equiv 0 \pmod{\alpha^k} \\ \sqrt{\frac{2}{\text{Norm}(\alpha^k)}}, & 2m \not\equiv 0 \pmod{\alpha^k} \end{cases}.$$

Область  $D_k$  находится алгоритмически из соотношений ортогональности базисных функций:

$$\begin{aligned} \sum \Lambda \text{COS}_k(p, x) \cdot \Lambda \text{COS}_k(q, x) &= 0; x \in G_k; p, q \in D_k; p \neq q, \\ \sum \Lambda \text{COS}_k(p, x) \cdot \Lambda \text{COS}_k(q, x) &\neq 0; x \in G_k; p, q \in D_k; p = q, \end{aligned}$$

алгоритм для расчета этой области описан в [2].

## 2.2. Двумерное ДКП

Двумерным ДКП называют преобразование

$$X(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cos\left(\frac{\pi k_1(n_1+0.5)}{N_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k_2(n_2+0.5)}{N_2}\right),$$

где  $x(n_1, n_2)$  — исходный сигнал (блок яркостей изображения),  $N_i$  — размер  $i$ -той стороны блока,  $X(m_1, m_2)$  — спектр исходного сигнала.

Тогда обратным двумерным ДКП называется преобразование

$$x(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \lambda_1(m_1) \lambda_2(m_2) X(m_1, m_2) \cos\left(\frac{\pi k_1(m_1+0.5)}{N_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k_2(m_2+0.5)}{N_2}\right),$$

где  $\lambda_i(m)$  — нормирующий коэффициент, вычисляемый как

$$\lambda_i(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N_i}}, & m = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N_i}}, & m \neq 0 \end{cases}.$$

### 2.3. Описание алгоритма сжатия

Исследуемый алгоритм сжатия состоит из следующих этапов:

- разбиение изображения на блоки;
- вычисление ДОП для каждого из блоков;
- квантование полученной частотной области (сжатие с потерями);
- упаковка квантованных спектральных компонент для последующего сжатия без потерь.

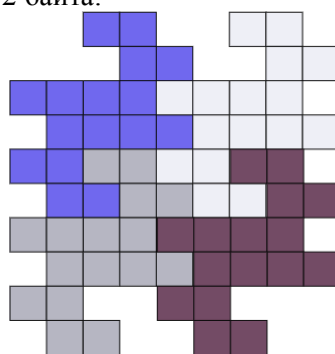
В случае ФДКП разбиение выполняется в соответствии с  $k$ -фундаментальной фрактальной областью (2). Эта область описывает форму блока, а сдвиги блока по всему изображению вычисляются исходя из размеров блока (рисунок 1). При использовании двумерного ДКП используются квадратные блоки. В случаях, когда блоки выходят за границу изображения, недостающие значения дополняются значениями яркости из ближайшего пикселя.

Сжатие с потерями производится путем квантования спектральных компонент каждого блока в соответствии с вектором (или матрицей в двумерном случае) квантования. Векторы квантования рассчитываются для каждого алгоритма исходя из среднеквадратичного отклонения (СКО) соответствующих спектральных компонент по формуле

$$q_i = \left\lfloor \frac{\sigma_{\max} + 10}{3} \frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} \right\rfloor \cdot Q,$$

где  $q_i$  –  $i$ -тая компонента вектора (или матрицы) квантования,  $\sigma_i$  – СКО  $i$ -той компоненты,  $\sigma_{\max}$  – максимальное значение СКО по всем компонентам,  $Q$  – параметр алгоритма, являющийся настройкой степени сжатия изображения. Смысл данной формулы заключается в том, чтобы компоненте, имеющей большее СКО, дать большее количество уровней квантования. Например, для ФДКП  $\alpha = -1 + i$ ,  $k = 3$  вектор квантования при  $Q = 1$  равен (3,4,5,4,6,7,7,6).

Квантованные значения спектральных компонент записываются последовательно, на каждую компоненту отводилось по 2 байта.



**Рисунок 1.** Пример разбиения изображения на блоки при использовании ФДКП для  $\alpha = -1 + i$ ,  $k = 4$ .

## 3. Исследование

### 3.1. Описание эксперимента

Сравнение проводилось на 10 полутоновых изображениях размером 512×512 из набора «Waterloo Grey Set». Все изображения были сжаты алгоритмами с использованием двумерного ДКП на блоках 4×4 и 8×8 и ФДКП с параметрами  $\alpha = -1 + i$ ;  $k = 3, 4, 5, 6$ .

В качестве сравнительной меры визуального качества были выбраны PSNR, или отношение пикового сигнала к шуму, и MSSIM, или усредненная по изображению мера структурной схожести.

PSNR вычисляется по формуле

$$PSNR(x, y) = 20 \log_{10} 255 - 10 \log_{10} \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} [x(i, j) - y(i, j)]^2,$$

где  $x$  и  $y$  – сравниваемые полутоновые изображения,  $N_1, N_2$  – ширина и высота изображений в пикселях; значение PSNR выражается в децибелах. Чем выше значение PSNR, тем меньше изменилось изображение по сравнению с исходным.

MSSIM вычисляется как среднее значение SSIM для непересекающихся блоков 8×8:

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + 2,55^2)(2\sigma_{xy} + 7,65^2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + 2,55^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 7,65^2)},$$

$$MSSIM = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} SSIM(x, y),$$

где  $x$  и  $y$  – сравниваемые полутоновые изображения,  $M$  – количество блоков размером  $8 \times 8$ . Значения  $MSSIM$  лежат в диапазоне от -1 до 1, большее значение этой величины соответствует лучшей визуальной схожести двух изображений [6].

Для оценки степени сжатия использовалась информационная энтропия. Информационная энтропия показывает, какое количество информации в среднем несёт спектральная компонента после сжатия [7], и описывает теоретический предел сжатия последовательности. Соответственно, чем ниже значение энтропии, тем большего коэффициента сжатия можно достичь при сжатии данной последовательности. Энтропия вычислялась из последовательности квантованных спектральных компонент по формуле

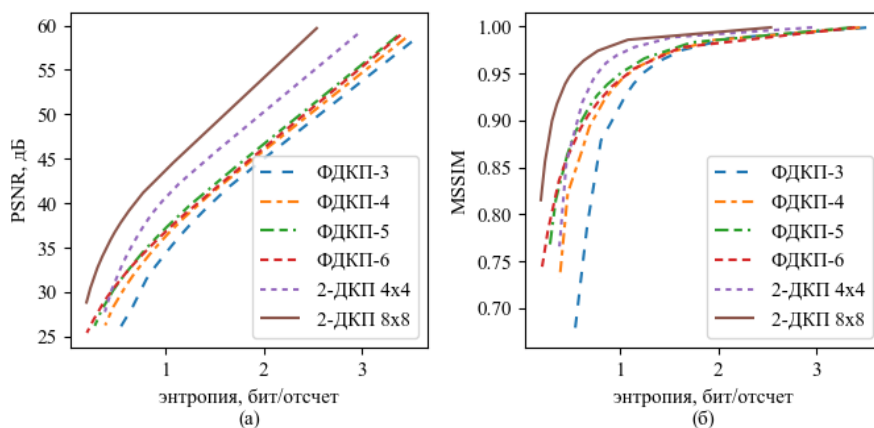
$$H = -\sum_{i=0}^{65535} p_i \log_2 p_i,$$

где  $p_i$  – вероятность появления значения  $i$  в последовательности.

### 3.2. Результаты

В результате исследования выяснилось, что на большинстве изображений для равных значений энтропии алгоритмы на основе двумерного ДКП показывают лучшие значения сравнительных мер визуального качества по сравнению с алгоритмами на основе ФДКП (рисунок 2), однако можно отметить следующее: во-первых, при значении энтропии от полутора бит на отсчет и выше значение  $MSSIM$  для алгоритмов на основе ФДКП отличается не больше, чем на 1%, что значит, что разница почти незаметна.

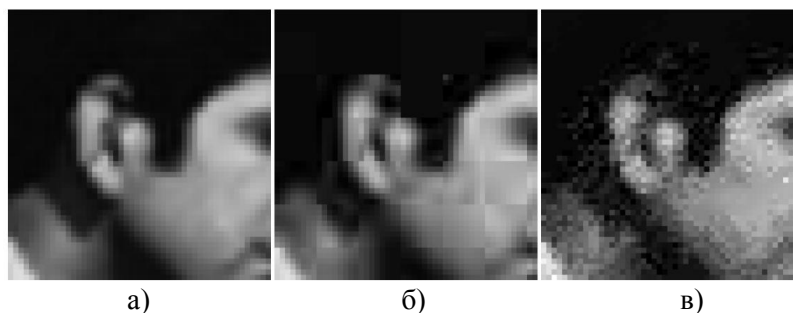
Во-вторых, начиная с некоторого значения энтропии, визуальное качество изображений, сжатых алгоритмом на основе ФДКП, превосходит визуальное качество изображений, сжатых алгоритмом на основе двумерного ДКП. Это также видно из графиков на рисунке 2. Такое свойство может пригодиться в системах передачи изображений, для которых приемлемы низкие значения PSNR (порядка 20 дБ).



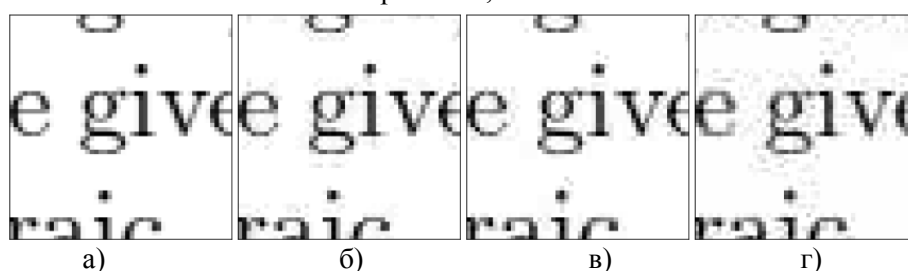
**Рисунок 2.** Графики зависимости визуальных характеристик изображения «Cameraman» в зависимости от информационной энтропии: а) PSNR; б) MSSIM.

Более того, на рисунке 3 виден характер искажений, вносимых фрактальными блоками ФДКП. По сравнению с квадратными блоками двумерного ДКП, фрактальная структура менее заметна, а границы объектов на изображении более резкие, хоть и сильнее зашумлены.

Наконец, можно отметить, что в экспериментах над изображениями, состоящими из текста, алгоритмы на основе ФДКП показали себя лучше, чем алгоритмы на основе двумерного ДКП, что имеет большой практический смысл при работе с отсканированными документами и книгами. Пример работы алгоритмов на изображениях, содержащих текст, приведен на рисунке 4.



**Рисунок 3.** Фрагменты изображения «Cameraman»: а) до сжатия; б) после сжатия алгоритмом на основе двумерного ДКП 8х8 (PSNR = 28,7 дБ; MSSIM = 0,81); в) после сжатия алгоритмом на основе ФДКП  $k = 6$  (PSNR = 25,42 дБ; MSSIM = 0,74). Оба сжатых изображения имеют энтропию 0,19 бит/отсчет.



**Рисунок 4.** Фрагменты изображения с текстом: а) до сжатия; б) после сжатия алгоритмом на основе ФДКП  $k = 3$  (PSNR = 24,54 дБ; MSSIM = 0,92); в) после сжатия алгоритмом на основе двумерного ДКП 4х4 (PSNR = 28,04 дБ; MSSIM = 0,96); г) после сжатия изображения алгоритмом на основе двумерного ДКП 8х8 (PSNR = 25,86 дБ; MSSIM = 0,89). Все сжатые изображения имеют энтропию 1,2 бит/отсчет.

#### 4. Заключение

В рамках настоящей работы был реализован и исследован алгоритм сжатия изображений с потерями на основе фрактального дискретного косинусного преобразования. Реализованный алгоритм был сопоставлен с алгоритмом на основе двумерного ДКП. В результате выяснилось, что ФДКП имеет совсем иной характер искажений, вносимых в изображение при сжатии: изображение, сжатое алгоритмом на основе ФДКП имеет более резкие, но более зашумленные границы объектов по сравнению с двумерным ДКП; структура фрактальных блоков заметна меньше, чем структура квадратного блока двумерного ДКП. Несмотря на то, что ФДКП показывает не лучшие числовые характеристики визуального качества при равном значении энтропии по сравнению с двумерным ДКП, собственно визуальное качество отличается несущественно для некоторых значений энтропии, что может найти применение в ряде областей обработки изображений.

Актуальными задачами, связанными с алгоритмом сжатия на основе ФДКП, являются синтез быстрых алгоритмов ФДКП, исследование алгоритмов на основе ФДКП на других  $k$ -фундаментальных областях, а также синтез алгоритма снижения уровня шумов, вносимых сжатием при использовании ФДКП.

#### 5. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №19-07-00357 и №18-01-00667).

#### 6. Литература

- [1] Белов, А.М. Исследование эффективности одномерных дискретных косинусных преобразований на развёртках двумерных сигналов, порождённых каноническими

- системами счисления / А.М.Белов // Компьютерная оптика. – 2011. – Т 35, № 4. – С. 519-522.
- [2] Каспарьян, М.С. Фрактальные дискретные косинусные преобразования на предфрактальных областях, ассоциированных с фундаментальными областями канонических систем счисления / М.С.Каспарьян // Компьютерная оптика. – 2014. – Т 38, № 1. – С. 148-153.
- [3] Katai, I. Canonical number system in imaginary quadratic fields / I. Katai, A. Kovacs // Acta Mathematica Hungarica. – 1981. – Vol. 37. – P. 159-164.
- [4] Katai, I. Canonical number systems for complex integers / I. Katai, J. Szabo // Acta Sci. Math.(Szeged). – 1975. – Vol. 37. – P. 255-260.
- [5] Чернов, В.М. Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований / В.М. Чернов – М.: Физматлит, 2007. – 264 с.
- [6] Wang, Z. Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity / Z. Wang, A.C. Bovik, H.R. Sheikh, E.P. Simoncelli // IEEE Transactions on Image Processing. – 2004. – Vol. 13. – P. 600-612.
- [7] Колесник, В.Д. Курс теории информации / В. Д. Колесник, Г. Ш. Полтырев – М.: Наука, 1982. – 416 с.

## Research of lossy image compression algorithm based on fractal discrete cosine transform

V.A. Butorov<sup>1</sup>, M.A. Chicheva<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

<sup>2</sup>Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

**Abstract.** Lossy image compression algorithm based on fractal discrete cosine transform is proposed in this paper. Created algorithm is compared to algorithm based on two-dimensional discrete cosine transform. It is shown experimentally that the described algorithm brings less distortion concerning block structure in comparison with square blocks of two-dimensional discrete cosine transform. It is remarked that visual quality characteristics of both algorithms vary poorly for several values ranges of entropy of compressed image.